25/4/17 Μάθημα 12ο

O ομάδα (ιδιοτητες) $|O|$ τάξη πεπερασμένες, άπειρες

κυκλικές → Αβελιανές → Γενικά τυχαίος

$\mathbb{Z}_n$ ή $\mathbb{Z}$???

$o(\alpha)$ τάξη στοιχείου $o(\alpha^m) = \dfrac{o(\alpha)}{(m, o(\alpha))}$

- $o(\alpha) \mid |O|$
- αν $\alpha\beta = \beta\alpha \Rightarrow o(\alpha\beta) = \text{ΕΚΠ}(o(\alpha), o(\beta))$
- $Y \leq O$ Κυκλική: Y όλες γνωστές
  Αβελιανή: »
  Γενικά: τυχαίοι

- $|Y| \mid |O|$

Συζυγία: $\alpha \underset{\text{συζυγή}}{\sim} \beta \Leftrightarrow \alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$

Συμπλοκα: $Y\alpha$ ή αY $\alpha \in O$

$Y\alpha \neq \alpha Y$ γενικά

Αριθμος συμπλοκων: $[O:Y]$ δεικτης

Ποτε $\alpha Y = Y\alpha$ $\forall \alpha \in O \Leftrightarrow Y \trianglelefteq O$

$Y \trianglelefteq O \Rightarrow O/Y$ ομάδα τάξης $\dfrac{|O|}{|Y|} = [O:Y]$

Συμμετρικές: Σ_ν, κυκλους, αρτιες, περιττες

Ιδιοτητα: $A_\nu \trianglelefteq \Sigma_\nu$ εναλλάσσουσα.

Ομομορφισμοί: $\phi: O \to G \Leftrightarrow \phi(\alpha \circ_O \beta) = \phi(\alpha) \circ_G \phi(\beta)$

Μονο »

Επι »

Ισομορφισμός $O \cong G$

Όλες οι ιδιοτητες της O είναι και της G και αναποδα.

$Y \leq O \Rightarrow \phi(Y) \leq G$

$K \leq G \Rightarrow \phi^{-1}(K) \leq O$

$K \triangle G \Rightarrow \phi^{-1}(K) \triangle O$

Αν ϕ είναι επί και $Y \triangle O \Rightarrow \phi(Y) \triangle G$

$\boxed{\forall \alpha \in O \Rightarrow O(\phi(\alpha)) \mid O(\alpha)}$ για να δημιουργήσουμε ομομορφισμό)

Αυτά είναι που έχουμε δει ως τώρα.

Θεώρημα Cayley: Αν O είναι πεπερασμένη ομάδα τότε υπάρχει συμμετρική S_n η οποία περιέχει υποομάδα ισόμορφη με την O (Δηλαδή μπορούμε να πούμε ότι κάθε πεπερασμένη ομάδα "ζει" μέσα σε κάποια συμμετρική).

απόδειξη:

$\Sigma_v = \{$ όλες οι 1-1 και επί απεικονίσεις από ένα σύνολο v-στοιχείων στον εαυτό του $\}$

$|O| = v < \infty$

$\Sigma_O = \{$ όλες οι 1-1, επί από το O στο O $\}$ περιέχει τις μεταθέσεις του O.

Έστω η απεικόνιση $f_g : O \to O$ για τυχαίο $g \in O$ με τύπο $f_g(\alpha) = g\alpha$ $\alpha \in O$

πρέπει f_g 1-1

$f_g(\alpha) = f_g(\beta) \Leftrightarrow g\alpha = g\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Άρα η f_g είναι μετάθεση του O.

$f_g \in \Sigma_O$

Αν έχουμε δύο στοιχεία gg' θα πάρουμε δύο μεταθέσεις??

$f_{gg'}(\alpha) = (gg')\alpha = g(g'\alpha) = g(f_{g'}(\alpha)) =$
$= f_g \, f_{g'}(\alpha)$ (*)

Ορίζουμε $\phi : O \to \Sigma_O$ με τύπο $\phi(g) = f_g$ που είναι μετάθεση

Θ. δ. ο η ϕ είναι μονομορφισμός
(Αν είναι η εικόνα της είναι η ίδια και είναι υποομάδα της S_O)

Ομομορφισμός: $\phi(gg') = \phi(g) \cdot \phi(g')$
$\phi(gg') = f_{gg'} = f_g \cdot f_{g'} = \phi(g) \cdot \phi(g')$
Η $\phi(g) = \phi(g')$ θέλουμε $g = g'$
$\phi(g) = \phi(g') \iff f_g = f_{g'}$ είναι μεταθέσεις στο O.
Αν βάλω οποιοδήποτε στοιχείο:
$f_g(e) = f_{g'}(e) \Rightarrow ge = g'e \Rightarrow g = g'$

ταυτοτικό

Τελικά $O \xrightarrow{\sim} \phi(O) \leq S_O$
ισομορφισμό, υποομάδα της S_O.

Εφαρμογή: $O = S_3 = \{1, f, f^2, g, fg, f^2g\}$
S_O όλες οι μεταθέσεις στο σύνολο
Η O είναι ισόμορφη με κάποια υποομάδα της S_O.
$|S_\nu| = \nu!$ άρα $S_O = S_6 = 6! = 24 \cdot 5 \cdot 6 = 720$
βρήκα υποομά με 720 στοιχεία ενώ είχαμε την O με 6 στοιχεία.

Ορισμός: Έστω $\phi: O \to G$ ομομορφισμός ομάδων
Με $\ker\phi = \{\alpha \mid \phi(\alpha) = 1_G, \alpha \in O\}$, συμβολίζουμε τον πυρήνα της ϕ.
τα στοιχεία που εδώ είναι αχρείαστα και πάνε στο μοναδιαίο είναι τετριμμένα.

Γνωρίζουμε $\phi(1_O) = 1_G \Rightarrow 1_O \in \ker\phi \neq \emptyset$

Αν $\phi: O \to G$ με τύπο $\phi(a) = 1_G$ τότε $\ker\phi = O$
τετριμμένος ομομορφισμός

Πρόταση: Αν $\phi: O \to G$ ομομορφισμός ομάδων, τότε $\ker\phi \trianglelefteq O$ (κανονική υποομάδα της O)

απόδειξη:

Έστω $\alpha_1, \alpha_2 \in \ker\phi \Rightarrow \phi(\alpha_1\alpha_2) = \phi(\alpha_1)\cdot\phi(\alpha_2) = 1_G 1_G =$
$= 1_G \Rightarrow a_1, a_2 \in \ker\phi$.

Αν $\alpha_1 \in \ker\phi \Rightarrow a_1^{-1} \ker\phi$ διότι $\phi(\alpha_1) = 1_G \Rightarrow$
$\Rightarrow (\phi(\alpha_1))^{-1} = 1_G^{-1} = 1_G \Rightarrow \phi(\alpha^{-1}) = 1_G$

Άρα $\ker\phi \leq O$. Θέλουμε κανονική

Έστω $b \in O$, θέλουμε $b \ker\phi\, b^{-1} = \ker\phi$

$\phi(b \ker\phi\, b^{-1}) = \phi(b)\,\phi(\ker\phi)\cdot\phi(b^{-1}) =$
$= \phi(b)\cdot 1_G \cdot (\phi(b))^{-1} = \phi(b)\cdot(\phi(b))^{-1} = 1_G$

Άρα $b \ker\phi\, b^{-1} = \ker\phi$.

$$\phi(bb^{-1}) = \phi(1_O) = 1_G \Rightarrow \phi(b)\,\phi(b^{-1}) = 1_G \Rightarrow (\phi(b))^{-1} = \phi(b^{-1})$$

$\phi: O \to G \quad \ker\phi \trianglelefteq O$

π.χ. $\phi: GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$
$\phi(A) = \det A$

$\phi(AB) = \det(AB) = \det A \cdot \det B$

ϕ ομομ.

$\ker\phi = \{A \mid \phi(A) = 1\} = SL(n,\mathbb{R})$

$SL(n,\mathbb{R}) \trianglelefteq GL(n,\mathbb{R})$

ϕ επί

$$\det\left(\begin{pmatrix} \alpha & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right) = a \in \mathbb{R}^*$$

π.χ. $\Phi : \Sigma_n \to \mathbb{Z}_2$ με τυπο $\Phi(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{αν } \sigma \text{ αρτια} \\ 1, & \text{αν } \sigma \text{ περιττη} \end{cases}$

Ομοια $\Phi(\sigma\tau) \overset{\sigma,\tau \text{ αρτιες} \Rightarrow \sigma\tau \text{ αρτια}}{=} \Phi(\sigma\tau) = 0 = 0 + 0 = \Phi(\sigma) + \Phi(\tau)$

σ αρτια, τ περιττη: στ περιττη $\Rightarrow$

$\Phi(\sigma\tau) = 1 = 0 + 1 = \Phi(\sigma) + \Phi(\tau)$

σ, τ περιττη $\Rightarrow$ στ αρτια

$\Phi(\sigma\tau) = 0 = 1 + 1 = \Phi(\sigma) + \Phi(\tau)$

Η Φ είναι ομομορφισμος

$\ker\Phi = \{\sigma \mid \Phi(\sigma) = 0 \Rightarrow \sigma \text{ αρτια}\} = A_n$

π.χ. $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με τυπο $\boxed{\Phi(t) = \cos 2\pi t + i \sin 2\pi t}$

$\Phi(t + t') = \cos 2\pi(t + t') + i \sin 2\pi(t + t') =$

$= (\cos 2\pi t + i \sin 2\pi t)(\cos 2\pi t' + i \sin 2\pi t') = \Phi(t) \cdot \Phi(t')$

Αρα είναι ομομορφισμός

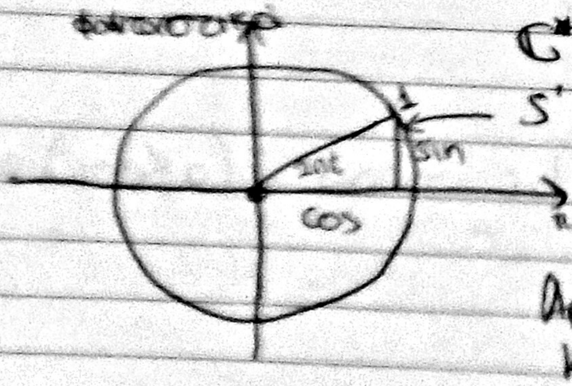
$\ker\Phi = \{t \mid \Phi(t) = 1\} = \mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{R}$ (κανονική υποομαδα)

$\Phi(t) = \underbrace{\cos 2\pi t}_{1} + \underbrace{i \sin 2\pi t}_{0} = 1 \Rightarrow t$ ακεραιος $\in \mathbb{Z}$

η χωρις περισσοτερο ποσα/πλαισιο

Ο πυρηνας αυτης της απεικονισης είναι το $\mathbb{Z}$

η εικονα της Φ: $\operatorname{Im}\Phi = \{c \in \mathbb{C}^* \text{ ωστε να υπαρχει } t \text{ με } \Phi(t) = c\}$



$\mathbb{C}^*$

S^1 μοναδιαιος κυκλος γιατι $\|\Phi(t)\| = 1$

$\|c\| = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c \in S^1$

Αρα η εικονα είναι ο μοναδιαιος κυκλος

Αρα εχουμε $\Phi : \mathbb{R} \xrightarrow{\text{επιμορφισμος}} S^1 \leq \mathbb{C}^*$

ο πυρηνας είναι $\mathbb{Z}$, γνωριζουμε οτι μπορουμε να παρουμε τα συμπλοκα $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{r + \mathbb{Z} \mid r \in \mathbb{R}\} = \{r + \mathbb{Z} \mid r \in [0,1)\}$

$\mathbb{R}/\ker\Phi \cong \operatorname{Im}(\Phi) = S^1$

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} \cong S^1$

π.χ. Εστω $Y \triangleleft O$ ορίζουμε την προβολή $\pi : O \to O/Y$ με τυπο $\pi(\alpha) = \alpha Y$. Ν.δ.ο είναι ομομορφισμός.

Λυση

Ομομορφ: $\pi(\alpha\alpha') = \alpha\alpha' Y = \alpha Y \alpha' Y = \pi(\alpha)\pi(\alpha')$

αρα είναι ομομορφισμός

πάω να βρω τον πυρηνα: $Ker\pi = \{\alpha \mid \pi(\alpha) = Y \Leftrightarrow \alpha Y = Y \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha \in Y\} = Y$ είναι και επί

$\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/_{k\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_k$

$n \mapsto \phi(n) = n \bmod k = n + n\mathbb{Z}$

$Ker\phi = k\mathbb{Z}$ Ν.δ.ο είναι επί

Γενικά $\phi : O \to O/_Y$ είναι επί γιατί αν αY είναι συμπλοκο $\phi(\alpha) = \alpha Y$.

ΠΡΩΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΣΟΜΟΡΦΙΣΜΩΝ

Εστω $\phi : O \to G$ επιμορφισμός. Τοτε υπάρχει ισομορφισμός $\bar{\phi} : O/_{Ker\phi} \xrightarrow{\cong} G$

εδώ κόβουμε "τα αρχίσει ταυτίζ" το πυρηνα

αποδειξη:

Δινεται $\phi : O \to G$ επιμ.

Ορίζουμε $\bar{\phi} : O/_{Ker\phi} \to G$ με τυπο $\bar{\phi}(aKer\phi) = \phi(a$

Αν $\alpha Ker\phi = \alpha' Ker\phi$

$\phi(\alpha) \underset{;;;}{=} \phi(\alpha')$

είναι στοιχειο

$\alpha Ker\phi = \alpha' Ker\phi \Leftrightarrow Ker\phi = \alpha^{-1}\alpha' Ker\phi \Leftrightarrow \alpha^{-1}\alpha' \in Ker\phi$

$$\left.\begin{array}{l} \Leftrightarrow \phi(\alpha^{-1}\alpha') = 1_G \Leftrightarrow \\ (\phi(\alpha))^{-1}\phi(\alpha') = 1_G \Leftrightarrow \\ \phi(\alpha') = \phi(\alpha) \end{array}\right\} (*)$$

Αρα η ϕ είναι καλά ορισμενη

Ομομορφ: $\bar{\Phi}(\alpha Ker\phi \cdot \alpha' Ker\phi) = \bar{\Phi}(\alpha\alpha' Ker\phi) =$

$= \phi(\alpha\alpha') = \phi(\alpha) \cdot \phi(\alpha') = \phi(\alpha Ker\phi)\, \bar{\Phi}(\alpha' Ker\phi)$

Επι: Η ϕ είναι επι $\Leftrightarrow \forall g \in G \ \exists \alpha \in O$ με

$\phi(\alpha) = g \Leftrightarrow \bar{\Phi}(\alpha Ker\phi) = g$

1-1: Αν $\bar{\Phi}(\alpha Ker\phi) = \bar{\Phi}(\alpha' Ker\phi) \Leftrightarrow \phi(\alpha) = \phi(\alpha')$ (*)

αντιστροφα

$\phi(\alpha)^{-1}\phi(\alpha') = 1_G \Rightarrow \phi(\alpha^{-1}\alpha') = 1_G \Rightarrow$

$\alpha^{-1}\alpha' \in Ker\phi \Rightarrow \alpha Ker\phi = \alpha' Ker\phi$

Αρα $O/Ker\phi \cong G$

$$\begin{tikzcd}
\alpha \quad O \arrow[r, two heads, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & G \ \phi(\alpha) \\
\alpha Ker\phi \quad O/Ker\phi \arrow[ur, dashed, "\bar{\Phi}"']
\end{tikzcd}$$

$Ker\phi \trianglelefteq O \Rightarrow$

αντιμεταθετικο $O/Ker\phi$ διαγραμμα